École Supérieure de Gestion

ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR TECHNIQUE PRIVÉ

CONCOURS D'ENTREE 1986

CONCOURS FORMULE GENERALE

Epreuve de MATHEMATIQUES II Durée 3 H Coefficient : 2

SAMEDI 19 AVRIL 1986 de 16 H à 19 H

EXERCICE :

On dispose des renseignements suivants, relatifs aux finances locales de communes du département de la Gironde :

COMMUNE	POPULATION ARRONDIE AU MILLIER INFERIEUR	DEPENSE MOYENNE PAR HABITANT EN FRANCS	IMPOT MOYEN PAR HABITANT EN FRANCS
BORDEAUX	226	2 163	700
LIBOURNE	22	1 862	735
ST MEDARD	16	1 455	896
ARCACHON	14	2 519	871
BLANQUEFORT	9	2 189	1 823
BRUGES	7	1 232	747
MERIGNAC	53	1 414	847
TALENCE	34	1 016	434
CENON	27	1 187	560
BEGLES	25	1 164	601
VILLENAVE	23	1 094	513

1°) Calculer, pour l'ensemble de la population des communes du tableau, la dépense moyenne par habitant effectuée par ces communes et l'impôt moyen par habitant prélevé par ces mêmes communes, ainsi que les écarts types associés.

2°) Calculer le coefficient de corrélation linéaire des rangs des communes entre les dépenses moyennes par habitant et les impôts moyens par habitant.

3°) A partir des données du tableau, construire la courbe de concentration des dépenses moyennes par habitant et calculer le coefficient correspondant.

PROBLEME :

PREMIERE PARTIE :

Soient : la matrice réelle :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

et les trois suites réelles u, v, w telles que :

$$\begin{cases} u_0 , v_0 , w_0 \in]0,1[\\ \text{et } \forall n \in \mathbb{N},\ (u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1}) = (u_n, v_n, w_n)\, M \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n, on ordonne (u_n, v_n, w_n) en un triplet croissant (U_n, V_n, W_n), où $U_n = \min\{u_n, v_n, w_n\}$, $W_n = \max\{u_n, v_n, w_n\}$ et $U_n \leqslant V_n \leqslant W_n$.
On pose $R_n = W_n - U_n$.

1°) - Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$W_{n+1} = aU_n + bV_n + cW_n$$

Où (a,b,c) est une permutation de l'une des colonnes de M.
En déduire que la suite W est convergente et que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad W_n - W_{n+1} \geqslant \frac{1}{6} R_n$$

puis que les suites U et V convergent et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\quad U_n - U_{n+1} \geqslant \frac{1}{6} R_n$$

2°) Etablir que $\forall n \in \mathbb{N},\ R_{n+1} \leqslant \frac{2}{3} R_n$, en déduire la convergence de R et déterminer sa limite. En déduire que U, V, W puis que u, v, w, sont convergentes, de même limite ℓ.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ |u_n - \ell| < \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

3°) - a) - Pour n entier naturel non nul, posons :

$$M^n = \begin{pmatrix} a_n & a'_n & a''_n \\ b_n & b'_n & b''_n \\ c_n & c'_n & c''_n \end{pmatrix}$$

Montrer que les suites a, a', a" (resp. b, b',b" ; resp. c, c', c") convergent vers une limite commune α (resp. β ; resp. γ). Montrer que $\alpha + \beta + \gamma = 1$

b) - Exprimer, pour n entier naturel non nul, a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n et en déduire les valeurs de α, β, et γ

École Supérieure de Gestion
Formule générale. Math 2
1986
page 283

DEUXIEME PARTIE :

Un mobile chemine aléatoirement entre 3 états A,B,et C.

Le tableau suivant donne les probabilités que, de l'étape n à l'étape n+1, il passe d'une position N ∈ {A,B,C} à M ∈ {A,B,C}

n \ n+1	A	B	C
A	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
B	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
C	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Les probabilités que le premier départ s'effectue de A,B ou C sont respectivement p_o,q_o, et r_o avec $p_o+q_o+r_o = 1$.

On désigne par p_n,q_n et r_n les probabilités que la position du mobile à la n-ième étape soit en A,B ou C respectivement.

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$$

En déduire que p_n, q_n, et r_n admettent des limites respectives p,q,et r, indépendantes de p_o,q_o, et r_o

TROISIEME PARTIE :

Soient n un entier naturel et X_n la variable aléatoire égale à 1 si la position à la n-ième étape est en A, et à 0 sinon.

1°) - Déterminer la loi de X_n

Montrer que $E\left[(X_n - p)^2\right]$ est majorée par un réel indépendant de n.

2°) - Pour m et n entiers naturels tels que $m \geqslant n$,on pose :

$$p_{mn} = P(X_m=1 \mid X_n=1)$$

Montrer que :

a) - $|p_{m,n} - p| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{m-n}$

b) - $E\left[(X_n-p)(X_m-p)\right] \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{m} + \left(\frac{2}{3}\right)^{m-n}$

Pour n entier naturel supérieur ou égal à 2, calculer en fonction de n :

$$\sum_{k=2}^{n} \quad \sum_{h=1}^{k-1} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{k} + \left(\frac{2}{3}\right)^{k-h}\right]$$

3°) - Que représente la variable aléatoire :

$$F_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \quad ?$$

Etablir :

a) - $(F_n-p)^2 = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{k=1}^{n} (X_k-p)\right]^2$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (X_k-p)^2 + \frac{2}{n^2} \sum_{k=2}^{n} \sum_{h=1}^{k-1} (X_h-p)(X_k-p)$$

b) - $\lim_{n\to\infty} E\left[(F_n-p)^2\right] = 0$

c) - $E\left[(F_n-p)^2\right] \geqslant \left[E(F_n-p)\right]^2$

et en déduire $\lim_{n\to\infty} E(F_n-p) = 0$

****